

министерство образования и науки российской федерации
Южно-Российский государственный политехнический университет
(НПИ) им. М. И. Платова

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания
к практическим занятиям
и самостоятельной работе студентов
(для очной формы обучения)

Новочеркасск
ЮРГПУ (НПИ)
2016

Начальник
УМУ ЮРГПУ(НПИ)

Ж.В.Кравченко

Рецензент – М.А.Комиссарова, д.э.н., профессор кафедры УСиЭС

Яковенко И.В.

Методы оптимизации: Методические указания к практическим занятиям и самостоятельной работе студентов/ Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М. И. Платова.-Новочеркасск: ЮРГПУ (НПИ) им. М. И. Платова, 2016. – __ с.

Содержат краткое описание практических занятий, приведены вопросы, которые рассматриваются на занятиях, даны темы для самостоятельной работы студентов и вопросы для самотестирования. Методические указания предназначены для подготовки бакалавров, обучающихся по направлению 38.03.01 «Экономика предприятий и организаций».

©Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова, 2016

1. ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАНЯТИЯ, ИХ НАИМЕНОВАНИЕ И ОБЪЕМ В ЧАСАХ

№	Наименование тем занятий	Кол-во	Форма контроля	Сроки контроля	Литература
1	<i>Модели линейного программирования</i>	2	Опрос, тест	10-15 октября	7[12]
2	<i>Графический метод решения задач линейного программирования</i>	2	Опрос, тест	10-15 октября	7 [12]
3	<i>Решение задач линейного программирования симплекс-методом</i>	2	Опрос, тест	10-15 октября	7 [12]
4	<i>Транспортная задача</i>	2	Опрос, тест	15-20 ноября	7 [12]
5	<i>Решение задачи о назначениях методом Мака.</i>	2	Опрос, тест	15-20 декабря	7 [13]
6	<i>Решение задачи о коммивояжере методом ветвей и границ.</i>	4	Опрос, тест	15-20 декабря	7 [13]
7	<i>Решение ТЗ в сетевой постановке.</i>	2	Опрос, тест	15-20 декабря	7 [13]

Лабораторное занятие № 1

Модели линейного программирования.

1. Задача о составлении плана.
2. Задачи о смеси (диете).
3. Расстановка типов судов по линиям.

Лабораторное занятие № 2

Графический метод решения задач линейного программирования

Задача 1. Колхоз имеет возможность приобрести не более 19 трехтонных автомашин и не более 17 пятитонных. Отпускная цена трехтонного грузовика - 4000 руб., пятитонного - 5000 руб. Колхоз может выделить для приобретения автомашин 141 тысячу рублей. Сколько нужно приобрести автома-

шин, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной?
Задачу решить графическим методом.

Задача 2. Решить задачу графическим методом на минимум и на максимум

$$x - 2y \rightarrow \min, \max$$

$$\begin{cases} 5x + 3y \geq 30, \\ x - y \leq 3, \\ -3x + 5y \leq 15, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Лабораторное занятие № 3

Решение задач линейного программирования симплекс-методом

Задача 1. Решить задачу линейного программирования симплекс-методом.

Целевая функция:

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 \rightarrow \min$$

Ограничивающие условия:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 &\leq 12 \\ 4x_1 - 13x_2 + 10x_3 + 5x_4 &\geq 6 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 &\geq 1 \end{aligned}$$

Задача 2. Найти значения переменных x_1, x_2 , при которых функция:

$$Q = 12x_1 + 10x_2$$

принимает **минимальное** значение, при условии следующих ограничений:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 12x_2 &\geq 20 \\ 4x_1 + 6x_2 &\geq 32 \\ 3x_1 &\geq 14 \\ 18x_2 &\geq 42 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Лабораторное занятие № 4

Транспортная задача

Задача 1. Используя метод минимального тарифа, представить первоначальный план для решения транспортной задачи. Проверить на оптимальность, используя метод потенциалов. Стоимость доставки единицы груза из каждо-

го пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов

	1	2	3	4	Запасы
1	1	2	4	3	6
2	4	3	8	5	8
3	2	7	6	3	10
Потребности	4	6	8	8	

Задача 2. В трех пунктах отправления A_1, A_2, A_3 имеется однородный груз в количестве a_1, a_2, a_3 соответственно. Этот груз нужно доставить пяти заказчикам B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 . Потребности в грузе в каждом пункте B_j ($j=1,2,\dots,5$) известны и равны соответственно b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 . Известны также тарифы перевозки c_{ij} - стоимость перевозки единицы груза из пункта A_i в пункт B_j . Нужно найти такой план перевозок, при котором весь груз из пунктов потребления будет вывезен, потребности всех заказчиков будут удовлетворены, и при этом общая стоимость перевозки всего груза будет наименьшей. Данные в таблице, в клетках которой проставлены элементы матрицы тарифов $C = (c_{ij})$; в последнем столбце таблицы указаны значения величин a_i , в последней строке - значения величин b_j .

Заказчики	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
Пункты						
A_1	4	9	2	5	3	23
A_2	4	6	2	1	8	25
A_3	6	2	3	4	5	17
b_j	14	10	16	10	15	

Требуется:

- Составить математическую модель задачи.
- Найти оптимальное решение транспортной задачи методом потенциалов.

Лабораторное занятие № 5

Решение задачи о назначениях методом Мака.

Задача 1. Дана матрица (платежная, временная и т.д.), нужно решить задачу о назначениях методом Мака на максимум, т.е. выбрать по одной клетке в строке и столбцу так, чтобы их сумма была максимальна.

$$\begin{pmatrix} 6 & 15 & 3 & 12 & 4 & 2 \\ 14 & 3 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & 15 & 8 & 12 \\ 3 & 14 & 3 & 15 & 11 & 10 \\ 3 & 13 & 1 & 9 & 6 & 6 \\ 15 & 10 & 3 & 4 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Практическое занятие № 6

Решение задачи о коммивояжере методом ветвей и границ.

Задача 1. Коммивояжер должен объездить 6 городов. Для того чтобы сократить расходы, он хочет построить такой маршрут, чтобы объездить все города точно по одному разу и вернуться в исходный с минимумом затрат. Исходный город А. Затраты на перемещение между городами заданы следующей матрицей:

	А	В	С	Д	Е	Ф
А	∞	26	42	15	29	25
В	7	∞	16	1	30	25
С	20	13	∞	35	5	0
Д	21	16	25	∞	18	18
Е	12	46	27	48	∞	5
Ф	23	5	5	9	5	∞

Лабораторное занятие № 7

Решение ТЗ в сетевой постановке.

Задача 1. $\bar{a} = (35, 25, 45)$, $\bar{b} = (30, 25, 10, 20)$.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 & 8 \\ 7 & 3 & 8 & 2 \\ 7 & 11 & 8 & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 15 & 20 & 10 & 10 \\ 10 & 5 & 5 & 6 \\ 10 & 10 & 20 & 10 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ответ. } X = \begin{bmatrix} 15 & 16 & 0 & 4 \\ 10 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}, z = 490.$$

Задача 2. $\bar{a} = (35, 30, 40)$, $\bar{b} = (30, 45, 15, 30)$.

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 5 & 10 \\ 4 & 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 20 & 10 \\ 15 & 10 & 20 & 5 \\ 15 & 35 & 10 & 20 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ответ. } X = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 15 & 10 \\ 15 & 10 & 0 & 5 \\ 10 & 15 & 0 & 15 \end{bmatrix}, z = 620.$$

2. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ (СРС)

СРС - темы и (или) разделы тем для самостоятельного изучения, в том числе конспектирование - **53,1 часа**

№	Наименование тем (разделов)	Кол-во часов	Литература
1	Составление математической модели задачи ЛП и решение ее графическим методом; экономический анализ полученного решения.	8	7 [1-5]
2	Решение задачи ЛП табличным симплекс-методом.	8	7 [1-5]
3	Решение ТЗ методом потенциалов.	8	7 [1-5]
4	Решение задачи ДП с использованием принципа Беллмана.	8	7 [1-5]
5	Решение задачи о назначениях методом Мака.	7	7 [1-5]
6	Решение задачи о коммивояжере методом ветвей и границ.	7	7 [1-5]
7	Решение ТЗ в сетевой постановке.	7,1	7 [1-5]

Задания для самостоятельного изучения и конспектирования

1. Составление математической модели задачи ЛП и решение ее графическим методом; экономический анализ полученного решения. Рассмотреть

следующие вопросы:

- составление математической модели задачи ЛП и решение ее графическим методом;
 - экономический анализ полученного решения.
2. Решение задачи ЛП табличным симплекс-методом. Рассмотреть следующие вопросы:
- составление симплекс-таблицы;
 - алгоритм решения.
3. Решение ТЗ методом потенциалов. Рассмотреть следующие вопросы:
- суть метода потенциалов;
 - общий план решения;
 - методы альтернативные методы решения ТЗ плюсы и минусы.
4. Решение задачи ДП с использованием принципа Беллмана. Рассмотреть следующие вопросы:
- общая постановка задачи динамического программирования;
 - принцип оптимальности и уравнения Беллмана.
5. Решение задачи о назначениях методом Мака. Рассмотреть следующие вопросы:
- управление производством;
 - задача о назначениях;
 - венгерский метод и метод Мака.
6. Решение задачи о коммивояжере методом ветвей и границ. Рассмотреть следующие вопросы:
- метод ветвей и границ и его преимущества;
 - алгоритм решения.
7. Решение ТЗ в сетевой постановке. Рассмотреть следующие вопросы:
- сетевые постановки транспортных задач;
 - задача о кратчайшем пути;
 - стандартная итерация.

СРС – групповые консультации с преподавателем в течение семестра – 0,9 ч.

Материалы для оценивания знаний:

1. Постановка задачи оптимизации. Понятие локального и глобального минимумов. Классификация задач оптимизации. Примеры задач оптимизации.
2. Теоремы существования в задачах оптимизации.
3. Определение выпуклого множества. Теоремы о выпуклости пересечения и суммы выпуклых множеств с произвольными коэффициентами.

4. Выпуклая комбинация точек. Теорема о выпуклой комбинации точек выпуклого множества.
5. Лемма о выпуклости множества всех выпуклых комбинаций точек произвольного множества.
6. Выпуклая оболочка множества. Теорема о выпуклой оболочке множества. Критерий выпуклости множества.
7. Понятие разделяющей гиперплоскости. Теорема о разделяющей гиперплоскости.
8. Понятие опорной гиперплоскости. Теорема о существовании опорной гиперплоскости к выпуклому множеству.
9. Теорема об отделимости выпуклых множеств.
10. Понятие надграфика и эффективной области функции. Собственные функции. Определение выпуклой функции. Необходимое и достаточное условие выпуклости собственной функции. Теорема о выпуклости эффективной области выпуклой функции.
11. Определение строго выпуклой и сильно выпуклой функции на выпуклом множестве. Теорема о выпуклости суммы двух выпуклых функций с неотрицательными коэффициентами.
12. Неравенство Йенсена (критерий выпуклости функции). Теорема о максимуме выпуклых функций. Теоремы о суперпозиции выпуклых функций.
13. Понятие производной по направлению. Теорема о существовании производных по направлению выпуклой функции. Теорема Радемахера.
14. Критерий сильной выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции. Критерий выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции. Достаточное условие строгой выпуклости.
15. Теоремы о свойствах множества точек минимума выпуклой функции.
16. Понятие субдифференциала функции. Геометрическая интерпретация. Свойства субдифференциала выпуклой функции. Теорема Кларка.

17. Понятие направления убывания функции. Понятие возможного направления. Теорема о необходимых условиях минимума в терминах направлений.
18. Теоремы о дифференциальных условиях оптимальности функции на многомерном параллелепипеде и на множестве векторов с неотрицательными компонентами.
19. Функция Лагранжа. Теорема о достаточных условиях абсолютного минимума в задачах условной оптимизации.
20. Понятие регулярной задачи оптимизации. Условие регулярности и его геометрический смысл.
21. Условие регулярности Слейтера. Теорема Куна-Таккера. Теорема Куна-Таккера в дифференциальной форме.
22. Понятие седловой точки. Теорема о седловой точке функции Лагранжа (достаточное условие оптимальности). Теорема о существовании седловой точки функции Лагранжа.
23. Основная схема численных методов безусловной оптимизации. Критерии останова. Понятие сходимости метода. Скорость сходимости. Классификация численных методов оптимизации.
24. Способы выбора шага по направлению.
25. Градиентные методы решения задач безусловной оптимизации. Понятие плохо обусловленной (овражной) функции. Особенности градиентных методов.
26. Метод Ньютона решения задач безусловной оптимизации. Модификации метода Ньютона.
27. Сопряженные направления и их использование для решения задач безусловной минимизации выпуклых квадратичных функций. Методы сопряженных градиентов. Особенности методов.
28. Субградиентные методы. Особенности методов.

29. Метод проекции градиента. Теорема о необходимом и достаточном условии оптимальности в задачах выпуклого программирования. Особенности метода.

30. Метод штрафных и барьерных функций для решения задач условной оптимизации.

Материалы для оценивания умений и навыков:

Задание 1. Изобразить на плоскости сумму двух множеств: $X_1 = [x_1, x_2]$, где $x_1 = (4, a)$, $x_2 = (4, 3)$ и $X_2 = \{(-2, -1), (1, b), (3, -c)\}$

1.1. $a = 2, b = 2, c = 1$

Задание 2. Доказать выпуклость множества S :

1.2. $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1 \right\}$

Задание 3. Проверить является ли функция f выпуклой (вогнутой) на заданном множестве X , указать такие точки из X , в окрестности которых f не является ни выпуклой, ни вогнутой:

$$f = 7x_1^2 - x_2^5 + 0,5x_3^2 - x_3 + 6, X = \mathbb{R}^3$$

Задание 4. Доказать выпуклость функции $f(x)$ и вычислить ее субдифференциал:

$$\max \{ e^x, 1 - x, 2 \} + |x|$$

Задание 5. Найдите минимум функции $y = 3\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2x$.

Задание 6. Найдите точку экстремума функции $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.

Задание 8. Решить задачу безусловной оптимизации:

$$x^2 - xy + y^2 - 2x + y \rightarrow \text{extr}$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная учебная литература

1. Вдовин В.М. Теория систем и системный анализ [Электронный ресурс]: учебник для бакалавров/ В.М. Вдовин, А.Е. Суркова, В.А. Валентинов.- 3-е изд.-М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К⁰», 2014 г. – 644 с. – Режим доступа <http://elanbook.com>

2. Есипов Б.А. Методы исследования операций [Электронный ресурс]: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Издательство «Лань», 2013 г. – 304 с. Режим доступа <http://elanbook.com>

3. Черников Ю.Г. Системный анализ и исследование операций [Электронный ресурс]: Учебное пособие для вузов. – М.: Издательство Московского государственного университета, 2006. – 370 с. - Режим доступа <http://elanbook.com>

4 . Математические методы обработки экспериментальных данных в экономике. Чураков Е.П. [Электронный ресурс]. Финансы и статистика, 2004 г. – 241 с. Режим доступа <http://www.knigafund.ru>

Дополнительная учебная литература

5. Мельник В.В. Совершенствование теории и методов оптимизации параметров технологических схем шахт [Электронный ресурс]: /В.В. Мельник, Л.И. Шулятьева, В.В. Агафонов [и др.]. – Электрон. дан. – М.: Горная книга, 2010 г.-241 с. - Режим доступа <http://elanbook.com>

6. Эконометрика [Электронный ресурс]: Учебник /Балдин К.В., Башлыков В.Н., Брызгалов Н.А., Мартынов В.В., Уткин В.Б.; под ред. В.Б. Уткина.-Дашков и К, 2015 г.- 562 с. - Режим доступа <http://www.knigafund.ru>

7. Эконометрика [Электронный ресурс]: Учебное пособие/ Глухов Д.А. - Воронежская государственная лесотехническая академия, 2012 г. -112с.- Режим доступа <http://www.knigafund.ru>

8. Эконометрика [Электронный ресурс]: Практикум / Валентинов В.А. – Дашков и К., 2010г. – 436 с. Режим доступа <http://www.knigafund.ru>

9. Балдин К.В., Рукоуев А.В., Башлыков В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика [электронный ресурс]: Учебник. - Дашков и К, 2014 г. - 473 с. – Режим доступа: <http://www.knigafund.ru>

10. Свешников А.Г., Тихонов А.Н., Васильева А.Б. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: Учебник для вузов.-ФИЗМАТЛИТ, 2014 г.- 251 с. - Режим доступа <http://www.knigafund.ru>

Методические указания и материалы по видам занятий

11. Теория вероятностей. Математическая статистика: учеб. Пособие. / Тимофеев Е.К. [и др.] ; Юж.-Рос. Гос. Техн. Ун-т (НПИ). – Новочеркасск, 2006. -136 с. – методобеспеченность – 0,06

12. Сборник задач по высшей математике : учеб. пособие. Ч. 1: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / П.А. Безгласный [и др.] ; Юж.-Рос. гос. техн. ун-т (НПИ). - Новочеркасск, 2001 г. - 110 с.

13. Сборник задач по высшей математике : учеб. пособие. Ч. 2: Основы математического анализа / Ф. Д. Беркович [и др.] ; Юж.-Рос. гос. техн. ун-т (НПИ). - Новочеркасск, 2001 г. - 81 с.

14. Сборник задач по высшей математике : учеб. пособие. Ч. 3 Интегральное исчисление. Элементы векторного анализа / Т. Ю. Горбаенко [и др.] ; Юж.-Рос. гос. техн. ун-т (НПИ). - Новочеркасск, 2004 г. - 104 с.

15. Сборник задач по высшей математике : учеб. пособие. Ч. 4: Дифференциальные уравнения. Ряды / Ф. Д. Беркович [и др.] ; ЮРГТУ (НПИ). - Новочеркасск: Набла, 2005г. – 80с.

16. Сборник задач по высшей математике. Элементы ТФКП и операционного исчисления. Простейшие уравнения математической физики: Учебное пособие /Сост. Беркович Ф.Д., Павленко Л.Н., Сорока М.В. и др. Юж.-Рос.гос. техн. Ун-т.-Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ), 2003г. – 85с.

17. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: Сб. тестовых заданий/ сост. Г.В. Додохова и др. ЮРГТУ - Новочеркасск. 2005г. – 148с.

18. Дифференциальные уравнения. Ряды: Сб. тестовых заданий по математике./Сост. Безгласная Н.П., Безгласный П.А., Беляков В.И. и др. Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. – Новочеркасск: ЮРГТУ, 2003г. – 57с.

19. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Интегральное исчисление: Сб. тестовых заданий по математике/ Сост. Безгласная Н.П., Безгласный П.А. Бергер Г.А. и др. Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. –Новочеркасск: ЮРГТУ, 2005 г. – 150с.

20. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Дидактические материалы: учебное пособие/ В.И. Беляков, Н.С. Чеботарева, В.Н. Шевляков, Юж.-Рос. Гос. Техн. Ун-т. – Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ), 2010 г.

21. Элементы линейной алгебры. Дидактические материалы: учебное пособие/ В.И. Беляков, Н.С. Маймина, Н.С. Чеботарева, Юж.-Рос. Гос. Техн. Ун-т. –Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ), 2010.

22. Теория вероятностей. Дидактические материалы: учебное пособие/ В.И. Беляков, Д.А. Радулевич, Юж.-Рос. Гос. Техн. Ун-т. –Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ), 2010г.

23. Теория вероятностей. Дидактические материалы: учебное пособие ч.2/ В.И. Беляков, Д.А. Радулевич, Юж.-Рос. Гос. Техн. Ун-т. –Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ), 2010 г.

24. Введение в математический анализ. Дидактические материалы: учебное пособие/ Н.С. Чеботарева, Ю.С. Чмутова, В.Н. Шевляков; Юж.-Рос. Гос. Техн. Ун-т. – Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ), 2011г.

25. Теория вероятностей. Случайные величины. Рубежный контроль знаний студентов: сборник контрольных заданий: практикум/ М.В. Сорока, А.Э. Пасенчук; Юж.-Рос. Гос. Техн. Ун-т. –Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ), 2011 г.

Интернет-ресурсы

1. www.wolframalpha.com

2. www.exponenta.ru

